Radboud Universiteit Nijmegen	Heyendaalseweg 135
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica	6525 AJ Nijmegen
Tentamen	**4 januari 2018**
Inleiding Statistiek	**12:30-15:30**

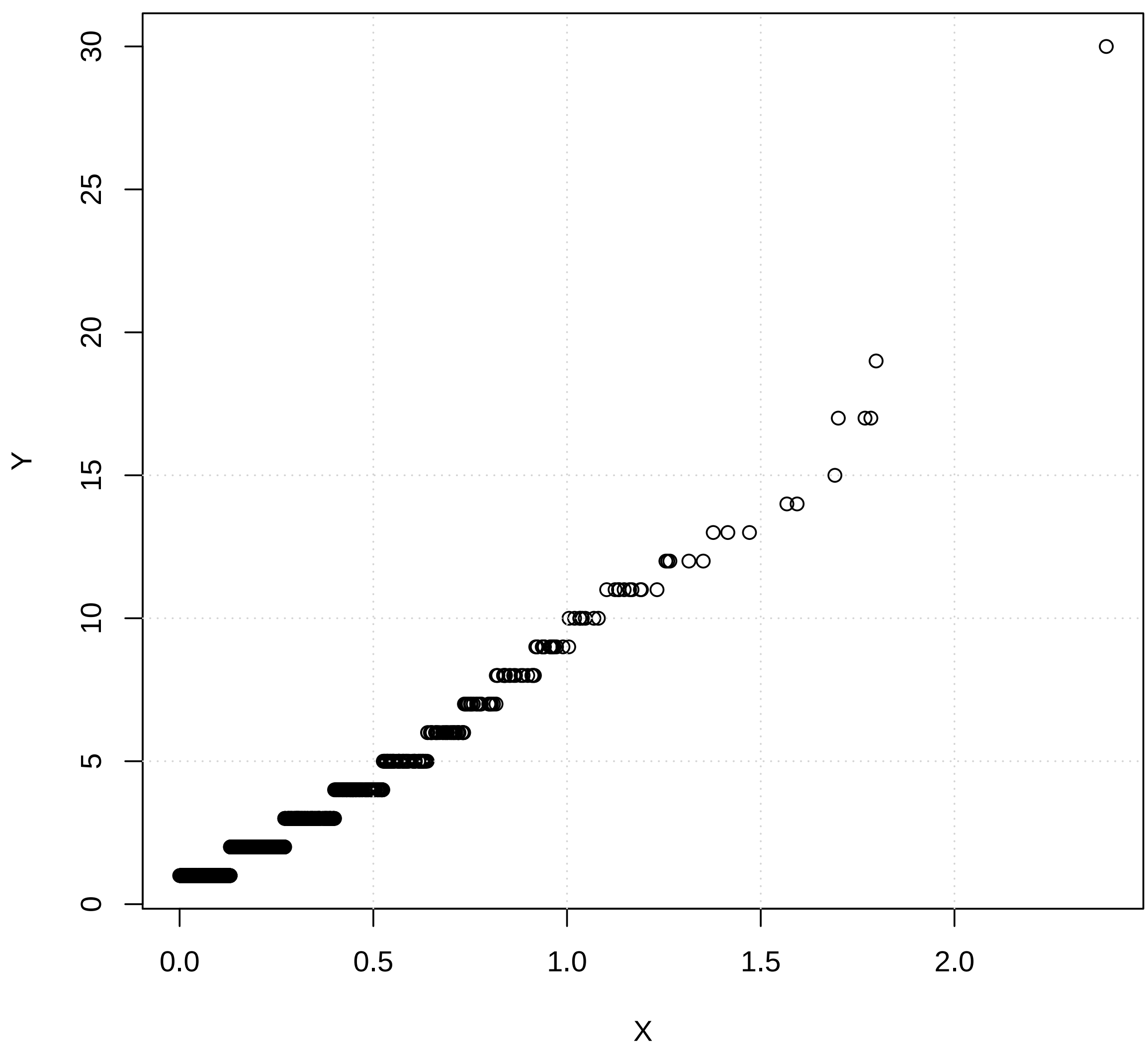
Het is toegestaan een (grafische) rekenmachine te gebruiken en het bijgeleverde formuleblad. Het is *niet* toegestaan een boek, aantekeningen, telefoons of apparaten met internetverbinding te gebruiken.

1. Bijgaand ziet u een QQ-plot van twee steekproeven van omvang $n = 1000$. Gegeven is dat Y een steekproef uit een Geo(p) verdeling is.

   (a) Uit welke verdeling komt de steekproef X? (Kies van formuleblad.)

   (b) Geef voor beide verdelingen een redelijke schatting voor de bijbehorende parameter(s).

   (c) Verklaar waarom de punten bij benadering op een rechte lijn liggen.



2. Neem aan dat $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef is uit een $\text{Exp}(\lambda)$ verdeling, met onbekende parameter $\lambda > 0$. We willen toetsen

$$H_0: \ \lambda \geq \lambda_0 \qquad \text{versus} \qquad H_1: \ \lambda < \lambda_0,$$

met significantieniveau α. Als toetsingsgrootheid nemen we

$$T_n = X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\},$$

en we verwerpen H_0 als $T_n > c_n$ voor zekere c_n.

   (a) Bepaal c_n en laat zien dat het onderscheidend vermogen $\pi(\lambda)$ voor deze toets gelijk is aan $\alpha^{\lambda/\lambda_0}$.

   (b) Bepaal de kans op een fout van de eerste soort als $\lambda = 2\lambda_0$ en de kans op een fout van de tweede soort als $\lambda = \lambda_0/2$.

   (c) Twintig gloeilampen waarvan de levensduur een $\text{Exp}(\lambda)$ verdeling heeft worden getest. Op $t = 10$ gaat de eerste kapot. Bepaal de p-waarde als we bovenstaande toets uitvoeren met $\lambda_0 = \frac{1}{80}$. Wordt H_0 verworpen bij $\alpha = 0.05$?

3. De actieradius A van een elektrische auto is volgens de fabrikant minstens 450 kilometer. In een test door de consumentenbond met $n = 4$ voertuigen wordt een gemiddelde actieradius van 414 km gevonden bij een steekproefvariantie van 144 km^2. Neem aan dat de actieradius normaal verdeeld is, dus $A \sim N(\mu, \sigma^2)$.

   (a) Toets de claim van de fabrikant bij een significantie van 5%. Geef de juiste nulhypothese en alternatieve hypothese. Bepaal ook (zo scherp mogelijke) onder- en bovengrenzen voor de p-waarde.

   (b) Na een software update worden er opnieuw 4 voertuigen getest. De gemiddelde actieradius is nu 432 km en de steekproefvariantie is 180 km^2. Toets met een twee-steekproeven toets of de actieradius gelijk is gebleven na de update. Neem aan dat de variantie σ^2 niet veranderd is. Gebruik een significantie van 5%.

4. Om te onderzoeken hoe vaak iemand die in Nijmegen woont de Waal oversteekt worden n willekeurige passanten ondervraagd. We definiëren

X	:	aantal Nijmegenaren dat vaker dan 1 keer oversteekt,
Y	:	aantal Nijmegenaren dat minder vaak oversteekt,
$n - X - Y$	:	aantal passanten dat niet in Nijmegen woont.

Een onderzoeker neemt als model

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \frac{n!}{x! \cdot y! \cdot (n - x - y)!} \cdot p^x \left(\frac{1}{2} - p\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x-y}.$$

Hierbij is $p \in [0, \frac{1}{2}]$ een onbekende parameter.

   (a) Welke aanname heeft de onderzoeker gemaakt?

   (b) Bepaal de maximum likelihood schatter voor p.

(c) Neem nu als a priori verdeling

$$\pi(p) = \begin{cases} 24p^2 & 0 \le p \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

Bepaal de Bayes schatter T voor p.
Hint: substitueer $q = 2p$ in de a posteriori kansdichtheid voor p.

5. Neem aan dat $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef is uit een discrete homegene verdeling waarvan de kansverdeling gegeven is door

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\theta + 1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \theta,$$

waarbij $\theta \in \mathbb{N}$ onbekend is. Om θ te schatten zijn de volgende twee schatters beschikbaar:

$$T_1 = 2\overline{X} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} X_n, \qquad T_2 = 2 \cdot \text{Mediaan}(X_1, \ldots, X_n).$$

(a) Laat zien dat T_1 en T_2 zuivere schatters voor θ zijn.

(b) Laat zien dat

$$\text{MSE}(T_1) = \frac{\theta^2 + 2\theta}{3n}.$$

U mag gebruiken dat $\sum_{k=0}^{\theta} k^2 = \frac{1}{6} \cdot \theta(\theta + 1)(2\theta + 1)$.

(c) Neem aan dat θ oneven is. Laat zien dat dan geldt

$$\mathbb{P}(|T_2 - \theta| \ge 1) \ge \begin{cases} 1 & \text{als } n \text{ oneven} \\ 1 - \binom{n}{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{als } n \text{ even} \end{cases}$$

Leid hieruit af dat $\lim_{n\to\infty} \text{MSE}(T_2) = 1$. Gebruik dat $\binom{n}{n/2} \approx 2^n / \sqrt{\pi n/2}$.

(d) Welke schatter heeft uw voorkeur?

EINDE

Puntenverdeling volgens onderstaande tabel.

Opgave	1	2	3	4	5	Gratis	Totaal
Punten	10	20	20	20	20	10	100

Indien u p punten scoort en de cijfers b_1 en b_2 voor de bonusopdrachten behaald hebt, dan is uw eindcijfer

$$\frac{2p + b_1 + b_2}{200}.$$

Formuleblad bij Statistiek

Dit blad is niet een samenvatting of overzicht, en dient slechts als hulpmiddel.

Kansverdelingen

1. **Alternatieve of Bernoulli verdeling**: Alt(p) of Ber(p).

   $\mathrm{P}(X=1)=p$ en $\mathrm{P}(X=0)=1-p$. EX$=p$; Var$(X)=p(1-p)$.
2. **Binomiale verdeling**: Bin(n,p).

   $\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ voor $k=0,1,\dots,n$. EX$=np$; Var$(X)=np(1-p)$.
3. **Geometrische verdeling** : Geo(p).

   $\mathrm{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ voor $k=1,2,\dots$. EX$=1/p$; Var$(X)=(1-p)/p^2$.
4. **Poisson-verdeling**: Pois(μ).

   $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$ voor $k=0,1,\dots$. EX$=\mu$; Var$(X)=\mu$.
5. **Exponentiële verdeling**: Exp(λ).

   $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ en $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ voor $x\geq 0$. EX$=1/\lambda$; Var$(X)=1/\lambda^2$.
6. **Homogene of Uniforme verdeling** op $[a,b]$: hom$[a,b]$ of $U(a,b)$.

   $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ en $F(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$ voor $a\leq x\leq b$. EX$=\frac{1}{2}(a+b)$; Var$(X)=\frac{1}{12}(b-a)^2$.
7. **Normale verdeling**: $N(\mu,\sigma^2)$.

   $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$ en $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}dt$. EX$=\mu$; Var$(X)=\sigma^2$.
8. **Gamma verdeling**: $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ $(\alpha,\lambda>0)$.

   $f(x)=\dfrac{x^{\alpha-1}\lambda^\alpha e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}1_{[0,\infty)}(x)$ met $\Gamma(\alpha)=\displaystyle\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$. EX$=\alpha/\lambda$; Var$(X)=\alpha/\lambda^2$.
9. **Beta verdeling**: $B_{\alpha,\beta}$ $(\alpha,\beta>0)$.

   $f(x)=\dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}1_{[0,1]}(x)$ met $B(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$.

   EX$=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$; Var$(X)=\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.

Covariantie en correlatie

1. Definitie covariantie: $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)$.
   Eigenschappen: $\mathrm{Cov}(X,Y)=EXY-EX\cdot EY$, $\mathrm{Cov}(rX+s,tY+u)=rt\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.
2. Definitie correlatiecoëfficiënt: $\rho(X,Y)=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$.
3. $\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Empirische verdelingsfunctie

Voor een dataset van n elementen: $F_n(x)=\dfrac{\text{aantal elementen in de dataset }\leq x}{n}$.

Centrale limietstelling

Als $X_1, X_2, \ldots$ een rij onafhankelijke stochasten is met alle dezelfde verdeling en met verwachting μ and variantie σ^2, dan geldt:

Centrale limietstelling:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq a\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq a\right),$$

waarbij Z een $N(0,1)$ verdeling heeft.

Locatie-schaal families

De locatie-schaal familie van dichtheden behorende bij een dichtheid f, wordt gegeven door

$$\left\{ f_{a,\lambda}(\cdot) = \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{\cdot - a}{\lambda}\right) \mid a \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \right\}.$$

Als $Z \sim f$ en $X = \lambda Z + a$, dan $X \sim f_{a,\lambda}$.

Kwantielen

Het α-onderkwantiel van een stochast X met verdelingsfunctie F wordt gedefinieerd als

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{P}\left(X \leq x\right) \geq \alpha\}.$$

Als $X = \lambda Z + a$, dan $F_X^{-1}(\alpha) = \lambda F_Z^{-1}(\alpha) + a$. Voor een dataset $x_1, \ldots, x_n$ schatten we het α-onderkwantiel $\hat{x}_\alpha$ door $k = \lfloor \alpha(n+1) \rfloor$, $\eta = \alpha(n+1) - k$ en $\hat{x}_\alpha = (1-\eta)x_{(k)} + \eta x_{(k+1)}$.

Schatters

De onzuiverheid (bias) van een schatter T voor θ: $ET - \theta$.
Als T_1 en T_2 zuivere schatters voor θ zijn, dan heet T_2 efficiënter dan T_1 als $\mathrm{Var}\left(T_2\right) < \mathrm{Var}\left(T_1\right)$.
De 'mean squared error' van een schatter T voor θ: $\mathrm{MSE}(T) = E(T-\theta)^2$.
Eigenschap: $\mathrm{MSE}(T) = \mathrm{Var}\left(T\right) + (ET - \theta)^2$.

Gestandaardiseerd en gestudentiseerd steekproefgemiddelde

Als X_i een $N(\mu, \sigma^2)$ verdeling hebben voor $i = 1, \ldots, n$, en onafhankelijk zijn, dan hebben

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{en} \quad \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}}$$

een $N(0,1)$, respectievelijk $t(n-1)-$verdeling. Hierbij is $t(n-1)$ de t-verdeling met $n-1$ vrijheidsgraden. Verder geldt

$$(n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Twee steekproeven

Bij de twee steekproeven t-toets:

Gelijke varianties: $S_p^2 = \dfrac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)$.

Ongelijke varianties: $S_d^2 = \dfrac{S_X^2}{n} + \dfrac{S_Y^2}{m}$.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	5000	4960	4920	4880	4840	4801	4761	4721	4681	4641
0.1	4602	4562	4522	4483	4443	4404	4364	4325	4286	4247
0.2	4207	4168	4129	4090	4052	4013	3974	3936	3897	3859
0.3	3821	3783	3745	3707	3669	3632	3594	3557	3520	3483
0.4	3446	3409	3372	3336	3300	3264	3228	3192	3156	3121
0.5	3085	3050	3015	2981	2946	2912	2877	2843	2810	2776
0.6	2743	2709	2676	2643	2611	2578	2546	2514	2483	2451
0.7	2420	2389	2358	2327	2296	2266	2236	2206	2177	2148
0.8	2119	2090	2061	2033	2005	1977	1949	1922	1894	1867
0.9	1841	1814	1788	1762	1736	1711	1685	1660	1635	1611
1.0	1587	1562	1539	1515	1492	1469	1446	1423	1401	1379
1.1	1357	1335	1314	1292	1271	1251	1230	1210	1190	1170
1.2	1151	1131	1112	1093	1075	1056	1038	1020	1003	0985
1.3	0968	0951	0934	0918	0901	0885	0869	0853	0838	0823
1.4	0808	0793	0778	0764	0749	0735	0721	0708	0694	0681
1.5	0668	0655	0643	0630	0618	0606	0594	0582	0571	0559
1.6	0548	0537	0526	0516	0505	0495	0485	0475	0465	0455
1.7	0446	0436	0427	0418	0409	0401	0392	0384	0375	0367
1.8	0359	0351	0344	0336	0329	0322	0314	0307	0301	0294
1.9	0287	0281	0274	0268	0262	0256	0250	0244	0239	0233
2.0	0228	0222	0217	0212	0207	0202	0197	0192	0188	0183
2.1	0179	0174	0170	0166	0162	0158	0154	0150	0146	0143
2.2	0139	0136	0132	0129	0125	0122	0119	0116	0113	0110
2.3	0107	0104	0102	0099	0096	0094	0091	0089	0087	0084
2.4	0082	0080	0078	0075	0073	0071	0069	0068	0066	0064
2.5	0062	0060	0059	0057	0055	0054	0052	0051	0049	0048
2.6	0047	0045	0044	0043	0041	0040	0039	0038	0037	0036
2.7	0035	0034	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026
2.8	0026	0025	0024	0023	0023	0022	0021	0021	0020	0019
2.9	0019	0018	0018	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014
3.0	0013	0013	0013	0012	0012	0011	0011	0011	0010	0010
3.1	0010	0009	0009	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007
3.2	0007	0007	0006	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005
3.3	0005	0005	0005	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003
3.4	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002

Tabel 1: *Rechteroverschrijdingskans* $1 - \Phi(a) = P(Z \geq a)$ *van de* $N(0,1)$*-variabele* Z.

$m \backslash p$	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.321	318.309	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

Tabel 2: Right critical values $t_{m,p}$ of the t-distribution with m degrees of freedom corresponding to right tail probability p: $\mathrm{P}\left(T_m \geq t_{m,p}\right) = p$. The last row in the table are right critical values of the $N(0,1)$ distribution: $t_{\infty,p} = z_p$

m	$\alpha = 0.995$	0.99	0.975	0.95	0.90	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.1	12.8	15.1	16.8
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0
70	43.2	45.4	48.8	51.7	55.3	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2
100	67.3	70.0	74.2	77.9	82.4	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

Tabel 3: Right critical values $\chi^2_p(m)$ of the χ^2-distribution with m degrees of freedom corresponding to right tail probability p: $\mathrm{P}\left(\chi^2(m) \geq \chi^2_p(m)\right) = p$.

Volledige oplossingen:

1a X neemt alleen positieve waarden aan, de dichtheidsfunctie lijkt maximaal bij 0 en dalend. Verder komt X uit een continue verdeling. De enige keuze die hierbij past is $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

1b Een manier is om te tellen hoeveel punten een bepaalde waarde overschrijden. Bijvoorbeeld voor de exponentiële verdeling zijn er 8 uitkomsten groter dan 1.5, dus los op

$$\mathbb{P}_\lambda(X > 1.5) = \frac{8}{1000}.$$

Omdat $\mathbb{P}_\lambda(X > 1.5) = e^{-1.5\lambda}$ geeft dit als schatting

$$\lambda = -\frac{\log(0.008)}{1.5} \approx 3.2.$$

Voor de geometrische verdeling zijn er 11 uitkomsten groter dan of gelijk aan 13, dus los op

$$\mathbb{P}_p(Y \geq 13) = \frac{11}{1000}.$$

Omdat $\mathbb{P}_p(Y \geq 13) = (1-p)^{12}$ geeft dit als schatting

$$p = 1 - 0.011^{1/12} \approx 0.31.$$

1c De dichtheid van X is te schrijven als $c_1 \cdot c_2^{-x}$ en de kansmassafunctie van Y is van de vorm $c_3 \cdot c_4^{-k}$. De staarten gaan dus even hard naar nul.

2a De verdelingsfunctie van X_1 is $\mathbb{P}(X_1 \leq x) = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ voor $x \geq 0$. Derhalve geldt

$$\pi(\lambda) = \mathbb{P}_\lambda(T_n > c_n) = (\mathbb{P}_\lambda(X_1 > c_n))^n = (e^{-\lambda c_n})^n = e^{-n\lambda c_n}.$$

Er moet gelden $\pi(\lambda_0) = \alpha$, dus

$$c_n = \frac{-\log(\alpha)}{n\lambda_0}.$$

Als we dit substitueren in $\pi(\lambda)$, dan volgt

$$\pi(\lambda) = \alpha^{\lambda/\lambda_0}.$$

2b Als $\lambda = 2\lambda_0$, dan is H_0 waar. Als we toch zouden verwerpen is dat een fout van de eerste soort. De kans hierop is

$$\pi(2\lambda_0) = \alpha^{2\lambda_0/\lambda_0} = \alpha^2.$$

Als $\lambda = \lambda_0/2$, dan is H_0 niet waar. Als we niet zouden verwerpen, dan is dat een fout van de tweede soort. De kans hierop is

$$1 - \pi(\lambda_0/2) = 1 - \alpha^{\lambda_0/2\lambda_0} = 1 - \sqrt{\alpha}.$$

2c De p-waarde (overschrijdingskans) is

$$\mathbb{P}_{\lambda_0}(T_n > 10) = e^{-n\lambda_0 \cdot 10} = e^{-200/80} = e^{-5/2} \approx 0.0821 > 0.05.$$

De nulhypothese wordt niet verworpen.

3a De hypothesen zijn
$$H_0 : \mu \geq 450, \qquad H_1 : \mu < 450.$$
Als toetsingsgrootheid nemen we het gestandaardiseerde steekproefgemiddelde.
$$T = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - 450}{S_n}.$$
De toets is eenzijdig; we verwerpen voor kleine waarden van T. Onder de nulhypothese heeft T een t-verdeling met $n-1=3$ vrijheidsgraden. De bijbehorende kritieke waarde is $t_{3,0.05} = 2.353$. Voor onze steekproef vinden we $T = 2 \cdot \frac{-36}{12} = -6$, hetgeen in absolute waarde groter is dan de kritieke waarde. Derhalve wordt H_0 verworpen. In de tabel kunnen we aflezen dat $t_{3,0.005} = 5.841$ en $t_{3,0.0025} = 7.453$ zodat de p-waarde tussen 0.0025 en 0.005 zit.

3b Noem de verwachting na update μ_u. De nulhypothese en alternatieve hypothese zijn dan
$$H_0 : \mu = \mu_u, \qquad H_1 : \mu \neq \mu_u.$$
Schrijf X voor de eerste steekproef en Y voor de tweede. Als toetsingsgrootheid nemen we nu
$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p},$$
waarbij
$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{n+n-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{S_X^2 + S_Y^2}{n}.$$
De toetsingsgrootheid T heeft een $t(2n-2)$-verdeling. Voor onze testresultaten vinden we dan
$$T = \sqrt{4}\frac{414 - 432}{\sqrt{144+180}} = -2.$$
Omdat we tweezijdig toetsen is de kritieke waarde in dit geval $t_{6,0.025} = 2.447$. We verwerpen de nulhypothese dus niet: er is geen significant verschil na de update.

4a De onderzoeker heeft aangenomen dat een willekeurige passant met kans $\frac{1}{2}$ in Nijmegen woont.

4b De likelihood functie is
$$L(p) = \frac{n!}{X! \cdot Y! \cdot (n-X-Y)!} \cdot p^X \left(\frac{1}{2} - p\right)^Y \left(\frac{1}{2}\right)^{n-X-Y},$$
dus de log-likelihood functie wordt gegeven door
$$l(p) = X\log(p) + Y\log\left(\frac{1}{2} - p\right) + C,$$
met C een constante die niet afhangt van p. De afgeleide is
$$\frac{d}{dp}l(p) = \frac{X}{p} - \frac{Y}{\frac{1}{2} - p},$$
en als we dit gelijkstellen aan nul vinden we het maximum bij
$$\hat{p} = \frac{X}{2(X+Y)}.$$

4c De dichtheid $f(p)$ van de a posteriori verdeling voldoet voor $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$ aan

$$f(p) \propto L(p) \cdot \pi(p) \propto p^X \left(\frac{1}{2} - p\right)^Y \cdot p^2 = p^{X+2} \left(\frac{1}{2} - p\right)^Y.$$

Dit lijkt op een Beta verdeling, maar die leeft op $[0,1]$. Daarom kijken we naar de verdeling van $q := 2p$. Substitueer $p = q/2$ om de a posteriori dichtheid van q te vinden:

$$g(q) \propto \left(\frac{q}{2}\right)^{X+2} \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{2}\right)^Y = \left(\frac{1}{2}\right)^{X+Y+2} q^{X+2}(1-q)^Y \propto q^{X+2}(1-q)^Y.$$

Dit is inderdaad de dichtheid van een $B_{\alpha,\beta}$ verdeling, met parameters $\alpha = X+3$ en $\beta = Y+1$. De Bayes schatter voor q is dus $\alpha/(\alpha+\beta)$, en als schatter voor p vinden we

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{X+3}{2(X+Y+4)}.$$

5a Voor de schatter T_1 vinden we

$$\mathbb{E}[T_1] = \mathbb{E}\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_1] = 2\sum_{k=0}^{\theta} k \cdot \mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{2}{\theta+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \theta(\theta+1) = \theta.$$

De mediaan kan alle waarden in $\{0, 1, \ldots, \theta\}$ aannemen en mogelijk ook nog de halven daartussen. Dus voor T_2 geldt

$$\mathbb{E}[T_2] = \sum_{k=0}^{2\theta} k \cdot \mathbb{P}(T_2 = k) = \sum_{k=0}^{2\theta} k \cdot \mathbb{P}(T_2 = 2\theta - k) = \sum_{k=0}^{2\theta} (2\theta - k)\mathbb{P}(T_2 = k),$$

waarbij de middelste gelijkheid geldt wegens symmetrie. Derhalve

$$\mathbb{E}(T_2) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2\theta} k \cdot \mathbb{P}(T_2 = k) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2\theta}(2\theta - k) \cdot \mathbb{P}(T_2 = k) = \theta \sum_{k=0}^{2\theta} \mathbb{P}(T_2 = k) = \theta.$$

5b Omdat T_1 een zuivere schatter is, geldt $\mathrm{MSE}(T_1) = \mathrm{Var}(T_1)$.

$$\mathrm{Var}(T_1) = \frac{4}{n^2} \cdot \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \frac{4}{n} \cdot \mathrm{Var}(X_1).$$

Om de variantie van X_1 te vinden bepalen we eerst $\mathbb{E}[X_1^2]$.

$$\mathbb{E}[X_1^2] = \sum_{k=0}^{\theta} k^2 \cdot \mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{1}{\theta+1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \theta(\theta+1)(2\theta+1) = \frac{1}{6}\theta(2\theta+1).$$

En nu gebruiken we de definitie van variantie:

$$\mathrm{MSE}(T_1) = \mathrm{Var}(T_1) = \frac{4}{n}\left(\mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2\right) = \frac{4}{n}\left(\frac{1}{6}\theta(2\theta+1) - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right) = \frac{\theta^2 + 2\theta}{3n}$$

5c Merk allereerst op dat $T_2 \in \mathbb{N}$, dus $T_2 \neq \theta$ is equivalent met $|T_2 - \theta| \geq 1$.
Als n oneven is, dan is Mediaan$(X_1, \ldots, X_n)$ gelijk aan de middelste uitkomst, dus een natuurlijk getal. Dus T_2 is even en derhalve $T_2 \neq \theta$ en $|T_2 - \theta| \geq 1$.
Als n even is, dan kan Mediaan$(X_1, \ldots, X_n)$ alleen gelijk zijn aan $\theta/2$ als precies de helft van de X_i kleiner is dan $\theta/2$ en precies de helft groter. De X_i zijn onafhankelijk en $\mathbb{P}(X_i \leq \theta/2) = \mathbb{P}(X_i \geq \theta/2) = \frac{1}{2}$, dus

$$\mathbb{P}(T_2 = \theta) \leq \binom{n}{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Daarom $\mathbb{P}(|T_2 - \theta| \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(T_2 = \theta) \geq 1 - \binom{n}{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Voor de MSE volgt nu

$$\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(T2) &= \mathbb{E}[(T_2 - \theta)^2] \\
&= \mathbb{E}[(T_2 - \theta)^2 \mid T_2 = \theta]\mathbb{P}(T_2 = \theta) + \mathbb{E}[(T_2 - \theta)^2 \mid T_2 \neq \theta]\mathbb{P}(T_2 \neq \theta) \\
&\geq 0 + \mathbb{E}[1^2] \left(1 - \binom{n}{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1 - \binom{n}{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&\approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi n/2}}.
\end{aligned}$$

De tweede term gaat naar nul, dus $\lim_{n \to \infty} \mathrm{MSE}(T_2) = 1$ voor θ oneven.

5d De MSE van T_1 gaat naar 0 als n naar oneindig gaat. De MSE van T_2 gaat alleen naar nul als θ even is, maar dat weten we op voorhand niet. Dus T_1 verdient de voorkeur.